矩 陣 的 對 角 化

(Diagonalization of Matrices)

對角矩陣

$$\begin{bmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{bmatrix}$$

非對角線元素均為零之矩陣

可對角化的矩陣

A為n×n階矩陣，若存在另一n×n階非奇異矩陣 **P** 使 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ 為一對角矩陣，則稱 **A** 為可對角化矩陣.
當此 **P** 存在時，稱 **P** 可對角化 **A**.

若**A**為n×n階矩陣，其 n 個特徵值為λ_1、λ_2、…、λ_n，且各別所對應的特徵向量為X_1、X_2、…、X_n，則

$$\mathbf{A}X_1 = \lambda_1 X_1$$

$$\mathbf{A}X_2 = \lambda_2 X_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{A}X_n = \lambda_n X_n$$

或改寫成

$$\mathbf{A}\underbrace{[X_1, X_2, \cdots, X_n]}_{\mathbf{P}} = [\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \cdots, \lambda_n X_n]$$

$$= \underbrace{[X_1, X_2, \cdots, X_n]}_{\mathbf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}}$$

令 $\mathbf{P} = [X_1, X_2, \cdots, X_n]$

及 $$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

則 $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$

$\Rightarrow \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$ 對角化完成！

[例題] $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

$\mathbf{A}$的特徵值為$-1, 3$

其對應的特徵向量分別為$\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$與$\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

若以另一次序寫特徵向量 $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

[例題] $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 12 & -11 & 12 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \lambda-5 & 4 & -4 \\ -12 & \lambda+11 & -12 \\ -4 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}=0$$

$$(\lambda-5)(\lambda+11)(\lambda-5)+192+192$$
$$-16(\lambda+11)+48(\lambda-5)+48(\lambda-5)=0$$

$$(\lambda-5)(\lambda+11)(\lambda-5)+192+192$$
$$-16(\lambda+11)+48(\lambda-5)+48(\lambda-5)=0$$

$$\lambda^3+\lambda^2-5\lambda+3=0$$

上式明顯有一根為1

$$(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda-3)=0$$

$$(\lambda-1)(\lambda+3)(\lambda-1)=0$$

$$\lambda=-3,1,1$$

$$\lambda_1 = -3, \begin{bmatrix} -3-5 & 4 & -4 \\ -12 & -3+11 & -12 \\ -4 & 4 & -3-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-8a_1 + 4a_2 - 4a_3 = 0$$

$$-12a_1 + 8a_2 - 12a_3 = 0$$

令 $a_3 = 1$

$$\begin{matrix} -8a_1 + 4a_2 = 4 \\ -12a_1 + 8a_2 = 12 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{2,3} = 1, \begin{bmatrix} 1-5 & 4 & -4 \\ -12 & 1+11 & -12 \\ -4 & 4 & 1-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -12 & 12 & -12 \\ -4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-4a_1 + 4a_2 - 4a_3 = 0$$

$$-4a_1 + 4a_2 - 4a_3 = 0$$

(1) 令 $a_3 = 0 \Rightarrow$ 選 $a_1 = 1,\ a_2 = 1$

$$\Rightarrow e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

二者必須線性獨立

(2) 令 $a_1 = 0 \Rightarrow$ 選 $a_2 = 1,\ a_3 = 1$

$$\Rightarrow e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&1&0\\3&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\2&-1&1\\1&-1&2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\2&-1&1\\1&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-4&4\\12&-11&12\\4&-4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\3&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3&-3&3\\2&-1&1\\1&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\3&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

或簡化 $\begin{bmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -12 & 12 & -12 \\ -4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -12 & 12 & -12 \\ -4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow a_1 - a_2 + a_3 = 0$ (有2個任意常數)

令 $a_2 = \alpha, a_3 = \beta \Rightarrow a_1 = \alpha - \beta$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

選 $e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; e_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

二者必須線性獨立

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 12 & -11 & 12 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$